PROCEEDINGS OF IAM, V.7, N.2, 2018, pp.247-260

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДВУМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ УИЗЕМА ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

Т. К. Юлдашев

Сиб.ГУ имени М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Резюме. Изучены вопросы разрешимости и определения неизвестного коэффициента в начальной задаче с помощью дополнительного условия для одного квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка. Выражение дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволило представить рассматриваемое уравнение как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль характеристик. Доказана однозначная разрешимость начальной задачи методом последовательных приближений. Получена оценка сходимости итерационного процесса Пикара. Определение неизвестного коэффициента сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

Ключевые слова: Обратная задача, характеристики, определение коэффициента, метод последовательных приближений, однозначная разрешимость.

AMS Subject Classification: 35A30, 35C15, 35G55, 35L30.

1. Постановка задачи

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1], [5], [18]. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков рассматривались в работах многих авторов, в частности в [8], [10], [11], [13]-[15], [17].

Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методов решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц [4]. В работах [6], [7] разработаны методики интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Вопросы определения коэффициента в разных задачах для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений рассмотрены многими авторами, в частности в [2], [3], [9], [12], [16], [19].

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times R^2$ рассматривается квазилинейное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\,(t,x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right)^m u(t,x,y) =$$

$$= \alpha(t)\beta(x,y) + F\,\left(t,x,\, y,u(t,x,y) \right) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t,x,y)_{|t=0} = \varphi_1(x,y),\ \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t,x,y)_{|\,t=0} = \varphi_{i+1}(x,y),\ x,y \in R\ ,i = \overline{1,m-1}, \qquad (2)$$

где $u(t,x,y) \in C^{m,m,m}(\Omega) -$ искомая функция, $\alpha(t) -$ неизвестная коэффициентная функция, $\beta(x,y) \in C^{m,m}\,(R^2)$, $f\,(t,x,y,u) \in C^{0,m,m,0}(\Omega \times R)$, $\varphi_i\,(x,y) \in C^{m,m}(R^2)$, $i = \overline{1,m}$, $\Omega_T \equiv \left[0,T\right]$, $0 < T < \infty$, $R^2 \equiv R \times R$, $R \equiv (-\infty,\infty)$, $m -$ натуральное число.

Требуется определить неизвестную коэффициентную функцию $\alpha(t)$ в задаче (1), (2) с помощью следующего условия

$$u(t,x_0,y_0) = \psi(t), \qquad (3)$$

где $x_0, y_0 \in R,\ \psi(t) \in C^m(\Omega_T),\ \psi(0) = 0.$

2. Сведение задачу (1), (2) к интегральному уравнению

Лемма 1. *Начальная задача* (1), (2) *и следующее интегральное уравнение эквивалентны*

$$u(t,x,y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\left(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\right) \frac{t^{m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \left[\alpha(s)\,\beta\big(p(t,s,x,y),q(t,s,x,y)\big) + \right.$$

$$\left. + F\,\left(s,p(t,s,x,y),q(t,s,x,y),u(s,p(t,s,x,y),q(t,s,x,y)) \right) \right] ds, \qquad (4)$$

где $p(t,s,x,y)$ *и* $q(t,s,x,y)$ *определяются из системы интегральных уравнений*

$$\begin{cases} p(t,s,x,y) = x - \int_s^t u\big(\theta, p(t,\theta,x,y), q(t,\theta,x,y)\big) d\theta, \\ q(t,s,x,y) = y - \int_s^t u\big(\theta, p(t,\theta,x,y), q(t,\theta,x,y)\big) d\theta, \end{cases} \tag{5}$$

$p(t,t,x,y) = x,\ q(t,t,x,y) = y,\ \ x, y$ *играют роль параметра.*

Доказательство. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\ (t,x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^m u = D_u^m[u],$$

где $D_u = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\ (t,x,y)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ – двумерный оператор Уизема.

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$D_u^m[u] = \alpha(t)\beta(x,y) + F\ \big(t,x,\ y, u(t,x,y)\big). \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет характеристики $x - \int_0^t u(s,x,y)\, d\, s = C_1$, $y - \int_0^t u(s,x,y)\, d\, s = C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Принимаем обозначения:

$$\begin{cases} p(t,s,x,y) = x - \int_s^t u\big(\theta, x, y\big) d\theta,\ \ p(t,t,x,y) = x; \\ q(t,s,x,y) = y - \int_s^t u\big(\theta, x, y\big) d\theta,\ \ q(t,t,x,y) = y. \end{cases}$$

Вводим функцию четырех аргументов $w(t,s,x,y) = u(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y))$, такую, что при $t = s$ она принимает вид $w(t,t,x,y) = u(t, p(t,t,x,y), q(t,t,x,y)) = u\ (t,x,y)$.

С учетом того, что

$$w_s(t,s,x,y) = u_s(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y)) +$$
$$+ u_p(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y)) \cdot p_s(t,s,x,y) +$$
$$+ u_q(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y)) \cdot q_s(t,s,x,y) =$$
$$= u_s(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y)) +$$
$$+ u(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y)) \cdot \big[u_p(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y)) +$$

$$+u_q(s,p(t,s,x,y),q(t,s,x,y))\big],$$

уравнение (6) перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}w(t,s,x,y)=\alpha(s)\,\beta\big(p(t,s,x,y),q(t,s,x,y)\big)+$$
$$+F\,\big(s,p(t,s,x,y),q(t,s,x,y),w(t,s,x,y)\big). \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) m раз вдоль характеристик, получаем

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}w(t,s,x,y)=\Phi_1\big(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\big)+$$
$$+\int_0^s\big[\alpha(\varsigma)\,\beta\big(p(t,\varsigma,x,y),q(t,\varsigma,x,y)\big)+$$
$$+F\,\big(\varsigma,p(t,\varsigma,x,y),q(t,\varsigma,x,y),w(t,\varsigma,x,y)\big)\big]d\varsigma, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}}w(t,s,x,y)=\Phi_2\big(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\big)+$$
$$+\Phi_1\big(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\big)\cdot s+$$
$$+\int_0^s(s-\varsigma)\cdot\big[\alpha(\varsigma)\,\beta\big(p(t,\varsigma,x,y),q(t,\varsigma,x,y)\big)+$$
$$+F\,\big(\varsigma,p(t,\varsigma,x,y),q(t,\varsigma,x,y),w(t,\varsigma,x,y)\big)\big]d\varsigma, \qquad (9)$$

. . . .

$$w(t,s,x,y)=\sum_{i=1}^{m}\Phi_i\big(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\big)\frac{s^{m-i}}{(m-i)!}+$$
$$+\int_0^s\frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\big[\alpha(\varsigma)\,\beta\big(p(t,\varsigma,x,y),q(t,\varsigma,x,y)\big)+$$
$$+F\,\big(\varsigma,p(t,\varsigma,x,y),q(t,\varsigma,x,y),w(t,\varsigma,x,y)\big)\big]d\varsigma, \qquad (10)$$

где $\Phi_i\big(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\big)$, $i=\overline{1,m}$, – произвольные постоянные вдоль характеристик, которые подлежат определению.

Начальные условия (2) для уравнения (7) имеют вид

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}w(t,0,x,y)=\varphi_m\big(p(t,0,x,y),q(t,0,x,y)\big),$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}} w(t,0,x,y) = \varphi_{m-1}\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big), \ldots ,$$

$$w(t,0,x,y) = \varphi_1\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big).$$

С учетом этих начальных условий из (8)-(10) получаем, что

$$w(t,s,x,y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big) \frac{s^{m-i}}{(m-i)!} +$$
$$+ \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \big[\alpha(\varsigma)\, \beta\big(p(t,\varsigma,x,y), q(t,\varsigma,x,y)\big) +$$
$$+ F\big(\varsigma, p(t,\varsigma,x,y), q(t,\varsigma,x,y), w(t,\varsigma,x,y)\big)\big] d\varsigma. \qquad (11)$$

При $t = s$ из (11) получаем интегральное уравнение (4) вместе с системой (5).

Путем m кратного дифференцирования вдоль характеристик из (4) получаем

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u(t,x,y) = \alpha(t)\beta(x,y) + F\big(t,x,y,u(t,x,y)\big), \qquad (12)$$

где x, y играют роль параметра.

С другой стороны, для левой части (12) вдоль характеристик справедливо

$$\frac{d^m u(t,x,y)}{d t^m} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x,y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right)^m u(t,x,y) .$$

Лемма доказана.

3. Разрешимость интегрального уравнения (4)

При фиксированных значениях $\alpha(t)$ изучаем интегральное уравнение (4).

Лемма 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $0 < \sup\limits_{(x,y)\in R^2} \sum\limits_{i=1}^{m} \left|\varphi_i(x,y)\right| \dfrac{T^{m-i}}{(m-i)!} \le \Delta_0 < \infty;$

2. $\left|\varphi_i(x_1,y_1) - \varphi_i(x_2,y_2)\right| \le \chi_i \left(\left|x_1 - x_2\right| + \left|y_1 - y_2\right|\right),$
 $0 < \chi_i = const,\ i = \overline{1, m};$

3. $\left|\beta(x_1,y_1) - \beta(x_2,y_2)\right| \le \omega \left(\left|x_1 - x_2\right| + \left|y_1 - y_2\right|\right),$
 $0 < \omega = const;$

4. $\sup\limits_{(x,y)\in R^2} \left| f(t,x,y,u)\right| \le M(t),\ \ 0 < M(t) \in C(\Omega_T);$

5. $\left| f(t,x_1,y_1,u_1) - f(t,x_2,y_2,u_2)\right| \le Q(t)\left(\left|x_1 - x_2\right| + \left|y_1 - y_2\right|\right) +$
$+ N(t)\left|u_1 - u_2\right|,\ 0 < Q(t) \in C(\Omega_T),\ \ 0 < N(t) \in C(\Omega_T);$

6. $0 < \max\limits_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^t \dfrac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} M(s)\,ds \le \Delta_1 < \infty;$

7. $0 < \sup\limits_{(t,x,y)\in\Omega} \int\limits_0^t \dfrac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \left|\alpha(s)\,\beta(x,y)\right| ds \le \Delta_2 < \infty;$

8. $0 < \max\limits_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^t \dfrac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \left[2Q(s)(t-s) + N(s)\right] ds < \infty;$

Тогда при фиксированных значениях $\alpha(t)$ *интегральное уравнение* (4) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение можно найти методом последовательных приближений:*

$$u_0(t,x,y) = 0,\ u_{k+1}(t,x,y) \equiv \Theta(t,x,y;u_k,p_k,q_k),\ k = 0,1,2,\ldots, \quad (13)$$

где $p_k(s,t,x,y)$ *и* $q_k(s,t,x,y)$ *определяются из следующих соотношений*

$$p_0(s,t,x,y) = x,\ \ p_k(s,t,x,y) = x - \int\limits_s^t u_k\left(\theta, p_k(\theta,t,x,y), q_k(\theta,t,x,y)\right) d\theta,$$

$$q_0(s,t,x,y) = y,\ q_k(s,t,x,y) = y - \int\limits_s^t u_k\left(\theta, p_k(\theta,t,x,y), q_k(\theta,t,x,y)\right) d\theta.$$

Доказательство. В силу условий леммы получаем, что для первой разности приближения (13) справедлива следующая оценка

$$\left|u_1(t,x,y) - u_0(t,x,y)\right| \le \sup\limits_{(x,y)\in R^2} \sum\limits_{i=1}^{m} \left|\varphi_i(x,y)\right| \frac{T^{m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+\sup_{(t,x,y)\in\Omega}\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left|\alpha(s)\,\beta(x,y)\right|d\,s+$$

$$+\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\,M(s)\,d\,s\le\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2. \tag{14}$$

С учетом (14) и условий леммы получаем, что для второй разности приближения (13) справедлива следующая оценка

$$\left|u_2(t,x,y)-u_1(t,x,y)\right|\le$$

$$\le 2\sum_{i=1}^m \frac{\chi_i\,T^{m-i}}{(m-i)!}\int_0^t\left|u_1(s,x,y)-u_2(s,x,y)\right|d\,s+$$

$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left[2\left(Q(s)+\omega\left|\alpha(s)\right|\right)\int_s^t\left|u_1(\varsigma,x,y)-u_2(\varsigma,x,y)\right|d\,\varsigma\,d\,s+\right.$$

$$\left.+\,N(s)\left|u_1(s,x,y)-u_2(s,x,y)\right|\right]d\,s\le$$

$$\le\int_0^t H(t,s)\left|u_1(s,x,y)-u_0(s,x,y)\right|d\,s\le(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\int_0^t H(t,s)\,d\,s, \tag{15}$$

где

$$H(t,s)=2\sum_{i=1}^m\frac{\chi_i\,T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left[2\left(Q(s)+\omega\left|\alpha(s)\right|\right)(t-s)+N(s)\right].$$

С учетом (15) для третьей разности приближения (13) получим следующую оценку

$$\left|u_3(t,x,y)-u_2(t,x,y)\right|\le\int_0^t H(t,s)\left|u_2(s,x,y)-u_1(s,x,y)\right|d\,s\le$$

$$\le(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\int_0^t H(t,s)\int_0^s H(s,\theta)\,d\,\theta\,d\,s=(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\,\frac{\left[\int_0^t H(t,s)\,d\,s\right]^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс, по индукции получаем, что

$$\left|u_{k+1}(t,x,y)-u_k(t,x,y)\right|\le\int_0^t H(t,s)\left|u_k(s,x,y)-u_{k-1}(s,x,y)\right|d\,s\le$$

$$\le(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\,\frac{\left[\int_0^t H(t,s)\,d\,s\right]^k}{k!}. \tag{16}$$

Из оценки (16) следует, что последовательность функций $\{u_k(t,x,y)\}_{k=1}^{\infty}$, определенная формулой (13), сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Пусть интегральное уравнение (4) имеет два решения: $u(t,x,y)$ и $\vartheta(t,x,y)$ в области Ω. Тогда для разности этих решений справедлива оценка

$$\left| u(t,x,y)-\vartheta(t,x,y) \right| \le \int_0^t H(t,s) \left| u(s,x,y)-\vartheta(s,x,y) \right| ds.$$

Применяя неравенства Гронуолла-Беллмана к последнему неравенству, получаем, что $\left| u(t,x,y)-\vartheta(t,x,y) \right| \equiv 0$ в области Ω. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2. *Тогда для итерационного процесса* (13) *справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$\left| u_k(t,x,y)-u(t,x,y) \right| \le (\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\,\frac{r^k}{k!}\cdot \exp\{r\}, \tag{17}$$

где $r=\max\limits_{t\in\Omega_T}\int_0^t H(t,s)\,ds<\infty.$

Доказательство. Действительно, в силу условий леммы с учетом (16) имеем оценку

$$\left| u_k(t,x,y)-u(t,x,y) \right| \le \left| u_{k+1}(t,x,y)-u_k(t,x,y) \right| + \left| u_{k+1}(t,x,y)-u(t,x,y) \right| \le$$

$$\le (\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\,\frac{r^k}{k!}+\int_0^t H(t,s) \left| u_k(s,x,y)-u(s,x,y) \right| ds.$$

Применение неравенства Гронуолла-Беллмана к последнему неравенству дает оценку (17). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда для любых* $x_1,\ x_2,y_1,\ y_2\in R$ *справедлива оценка*

$$\left| u(t,x_1,y_1)-u(t,x_2,y_2) \right| \le \Psi(t)\Big(\left| x_1-x_2 \right| + \left| y_1-y_2 \right|\Big), \tag{18}$$

где $\Psi(t)=\mu\cdot\exp\left\{\int_0^t H(t,s)\,ds\right\}<\infty,$

$$\mu=\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\chi_i\,T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\ \Big(Q(s)+\omega\left|\alpha(s)\right|\Big)(t-s)\right]ds.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий леммы для любых $x_1,\ x_2,y_1,\ y_2 \in R$ имеем оценку

$$\left|u(t,x_1,y_1)-u(t,x_2,y_2)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_i T^{m-i}}{(\mathrm{m}-i)!}\int_0^t \left(\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+2\left|u(s,x_1,y_1)-u(s,x_2,y_2)\right|\right)ds+$$

$$+\omega\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left|\alpha(s)\right|\int_s^t \left(\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+2\left|u(\theta,x_1,y_1)-u(\theta,x_2,y_2)\right|\right)d\theta\, ds+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}Q(s)\int_s^t \left(\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+2\left|u(\theta,x_1,y_1)-u(\theta,x_2,y_2)\right|\right)d\theta\, ds+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}N(s)\left|u(s,x_1,y_1)-u(s,x_2,y_2)\right|ds \leq$$

$$\leq \mu\cdot\left(\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|\right)+\int_0^t H(t,s)\left|u(s,x_1,y_1)-u(s,x_2,y_2)\right|ds,$$

где

$$\mu=\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left(Q(s)+\omega\left|\alpha(s)\right|\right)(t-s)\right]ds.$$

Применяя неравенства Гронуолла-Беллмана к последней оценке, получаем, что

$$\left|u(t,x_1,y_1)-u(t,x_2,y_2)\right|\leq\mu\left(\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|\right)\cdot\exp\left\{\int_0^t H(t,s)\,ds\right\}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (18). Лемма доказана.

Из выше доказанных лемм следует, что справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются все условия леммы* 2. *Тогда при фиксированных значениях* $\alpha(t)$ *начальная задача* (1), (2) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение находится из итерационного процесса Пикара* (13). *Для решения начальной задачи* (1), (2) *справедливы оценки* (17) *и* (18).

4. Определение неизвестного коэффициента

С помощью дополнительного условия (3) из интегрального уравнения (4) получаем

$$\int_0^t K(t,s)\alpha(s)\,ds = g(t), \tag{19}$$

где

$$K(t,s) = \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\beta\Big(p(t,s,x_0,y_0),\, q(t,s,x_0,y_0)\Big),$$

$$g(t) = \psi(t) - \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Big(p(t,0,x_0,y_0), q(t,0,x_0,y_0)\Big)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!} -$$

$$-\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\,F\,\Big(s, p(t,s,x_0,y_0), q(t,s,x_0,y_0), \psi\,(s)\Big)ds.$$

В силу постановки задачи, интегральное уравнение Вольтерра первого рода (19) имеет единственное решение на отрезке Ω_T. Это уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода путем m раз дифференцирования и далее применяется метод последовательных приближений.

Таким образом, справедлива и следующая

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия леммы* 2. *Тогда обратная задача* (1)-(3) *имеет единственную пару решений* $\{u(t,x,y),\, \alpha(t)\}$ *в области* Ω.

Литература

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 248 с.
2. Алиев Ф. А., Исмаилов Н. А., Намазов А. А., Магаррамов И. А. Асимптотический метод определения коэффициента гидравлического сопротивления на разных участках трубопровода при добыче нефти, Proceedings of IAM. 2017. vol. 6. N 1. pp. 3-15.
3. Гамзаев Х. М. Численный метод решения коэффициентной обратной задачи для уравнения диффузии–конвекции–реакции, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2017. № 50. С. 67-78.
4. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. М.: Мехмат МГУ, 1999. 95 с.
5. Замышляева А. А. Математические модели соболевского типа высокого порядка, Вестник Южно-УралГУ. Серия: Мат. моделирование и програм. 2014. Т. 7. № 2. С. 5-28. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp140201
6. Иманалиев М. И., Ведь Ю. А. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом, Дифференц. уравнения. 1989. Т. 23. № 3. С. 465-477.

7. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема, Докл. РАН. 1992. Том 325. № 6. С. 1111-1114.
8. Каримов Ш. Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя, Изв. вузов. Математика. 2017. № 8. С. 27-41.
9. Костин А. Б. Восстановление коэффициента перед ut в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 1. С. 89-104.
10. Кошанов Б. Д., Солдатов А. П. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости ,Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1666-1681.
11. Похожаев С. И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка, Мат. сборник. 1982. Т. 117. № 2. С. 251-265.
12. Романов В. Г. Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости, Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 3. С. 617-626.
13. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973. 219 с.
14. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени, Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2012. Т. 52. № 1. С. 112-123.
15. Юлдашев Т. К. Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром, Изв. ИМИ УдГУ. 2017. Т. 50. С. 121-132.
16. Юлдашев Т. К. Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром, / Доклады НАН Украины. 2017. № 5. С. 8-16.
17. Юлдашева А. В. Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка, Дифференциальные уравнения. Математическая физика. Итоги науки и техники Серия: Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Т. 140. М.: ВИНИТИ РАН, 2017. С. 43-49.
18. Benney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude, Journ. Math. Phys. 1964. Vol. 43. P. 309-313.
19. Yuldashev T. K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel, Lobachevskii journal of mathematics. 2017. vol. 38. N 3. pp. 547-553.

Determination of coefficient in differential equation with two dimensional Whitham operator of higher power

T. K. Yuldashev

ABSTRACT:

In this paper is studied the questions of the solvability and determination of the unknown coefficient by the aid of additional condition in initial value problem for a quazilinear partial differential equation of the higher order. Expression of partial differential equations of higher order as a superposition of first-order partial differential operators is allowed us to present the partial differential equation as an ordinary differential equation, describing the change of the unknown function along the characteristic. The existence and uniqueness of the solution of this problem by the method of successive approximations are proved. The estimate of convergence of the iterative Picard process is obtained. The determination of unknown coefficient is reduced to solving the Volterra integral equation of the first order.

Key words: Inverse problem, characteristics, determination of coefficient, method of successive approximations, one-value solvability.

References

1. Algazin S.D., Kiiko I.A. Flatter plastin i obolochek. Moscow: Nauka, 2006, 248 p. (Flutter of plates and shells. Moscow: Nauka, 2006, 248 p.) (in Russian)

2. Aliyev F. A., Ismailov N. A., Namazov A. A., Magarramov I. A. Asimptoticheskiy metod opredeleniya koeffitsiyenta gidravlicheskogo soprotivleniya na raznykh uchastkakh truboprovoda pri dobyche nefti, Proceedings of IAM, 2017, V.6, N.1, p. 3-15. (Aliyev F. A., Ismailov N. A., Namazov A. A., Magarramov I. A. Asymptotic method for determining the hydraulic resistance coefficient in different sections of the pipeline in oil production, Proceedings of IAM, 2017, V.6, N.1, p. 3-15.) (in Russian)

3. Gamzayev KH. M. Chislennyy metod resheniya koeffitsiyentnoy obratnoy zadachi dlya uravneniya diffuzii–konvektsii–reaktsii, Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mekh., 2017, N.50, p. 67-78. (Hamzayev Kh. M. Numerical method for solving the coefficient inverse problem for the diffusion – convection – reaction equation, Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mekh., 2017, N.50, p. 67-78.) (in Russian)

4. Goritskii A.Yu., Kruzhkov S.N., Chechkin G.A. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1999, 96 p. (Partial differential equations of the first order. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1999, 96 p.) (in Russian)

5. Zamyshlyaeva A. A. Mathematical models of high order Sobolev type, Vestnik Yuzhno-Ural. gos. Univ. Ser. Mat. modelirovanie i Program., 2014, V.7, N.2, p. 5-28. (Zamyshlyaeva A.A. The higher-order Sobolev-type models, Vestnik Yuzhno-Ural. gos. Univ. Ser. Mat. modelirovanie i Program., 2014, V.7, N.2, p. 5-28.) (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vyuru126

6. Imanaliev M.I., Ved' Yu.A. First-order partial differential equation with an integral as a coefficient, Differential Equations, 1989, V.25, N.3, p. 325-335. https://zbmath.org/?q=an:0689.45019
7. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. On the theory of systems of nonlinear integropartial differential equations of Whitham type, Doklady Mathematics, 1993, V.46, N.1, p. 169-173.
8. Karimov Sh.T. Method of solving the Cauchy problem for one-dimensional polywave equation with singular Bessel operator, Russian Mathematics, 2017, V.61, N.8, p. 22-35. DOI: 10.3103/S1066369X17080035
9. Kostin A. B. Recovery of the coefficient before u_t in the heat conduction equation by the condition of non-local observation over time, Comp. Mathematics and Math. Physics, 2015, V.55, N.1, p. 85-100.
10. Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane, Differential Equations, 2016, V.52, N.12, p. 1594–1609. DOI: 10.1134/S0012266116120077
11. Pokhozhaev S.I. On the solvability of quasilinear elliptic equations of arbitrary order, Mathematics of the USSR-Sbornik, 1983, V.45, N.2, p. 257-271.
DOI: 10.1070/SM1983v045n02ABEH002598
12. Romanov V.G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations, Sib. Math. Journ., 2014, V.55, N.3, p. 503-510.
13. Skrypnik I.V. Nelineinye ellipticheskie uravneniya vysshego poryadka. Kiev: Naukova dumka, 1973, 219 p. (Nonlinear elliptic equations of higher order. Kiev: Naukova dumka, 1973, 219 p.) (in Russian)
14. Yuldashev T.K. Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power, Comp. Mathematics and Math. Physics, 2012, V.52, N.1, p. 105-116. DOI: 10.1134/S0965542512010150
15. Yuldashev T. K. Obobshchennaya razreshimost' smeshannoy zadachi dlya nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya vysokogo poryadka s vyrozhdennym yadrom, Izvestiya IMI Udmurt. Gos. Univ., 2017, V.50, p. 121-132. (Yuldashev T.K. Generalized solvability of the mixed value problem for a nonlinear integro-differential equation of higher order with a degenerate kernel, Izvestiya IMI Udmurt. Gos. Univ., 2017, V.50, p. 121-132.) (in Russian) DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-10
16. Yuldashev T. K. Razreshimost' i opredeleniye koeffitsiyenta v odnoy krayevoy zadache dlya integro-differentsial'nogo uravneniya Fredgol'ma s vyrozhdennym yadrom, Doklady NAN Ukrainy, 2017, N.5. p. 8-16. (Yuldashev T. K. Solvability and determination of the coefficient in a boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation with a degenerate kernel, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2017, N.5, p. 8-16.) (in Russian)
17. Yuldasheva A.V. Yuldasheva A. V. Ob odnoy zadache dlya kvazilineynogo uravneniya chetnogo poryadka, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, V.140, Moscow: VINITI RAN, 2017, p. 43-49. (On a problem for a quasi-linear equation of even order,

Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, V.140, Moscow: VINITI RAN, 2017, p. 43-49.) (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/into233

18. Benney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude, Journ. Math. Phys. 1964. V.43. p. 309-313. DOI: 10.1002/sapm1964431309

19.Yuldashev T. K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel,Lobachevskii journal of mathematics, 2017,V.38, N.3, p. 547-553.DOI: 10.1134/S199508021703026X